Formulaire d'électrostatique

1 Champ électrostatique

$\vec{E}$ créé par une charge q à position P :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$\vec{E}$ créé par N charges ponctuelles :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{\boldsymbol{u}}_i$$

$\vec{E}$ créé par une distribution continue :

$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}_P(M) \ , \ d\vec{E}_P(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{u}}$$

où dq est déterminé par une distribution de charge :

$$\begin{array}{ll} \textbf{linéique} : & dq = \lambda(P)\, dl_P \equiv \lambda dl \\ \textbf{surfacique} : & dq = \sigma(P)\, d^2S_P \equiv \sigma d\mathcal{S} \\ \textbf{volumique} : & dq = \rho(P)\, d\mathcal{V}_P \equiv \rho d^3\mathcal{V} \end{array} \quad (1)$$

(**N.B.** ϵ_0 est la permittivité du vide)
$1/(4\pi\epsilon_0) \equiv K \simeq 9.10^9$SI.

2 Propriétés fondamentales

1. **Théorème de Gauss :**

   Forme intégrale $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ **Forme différentielle** $\displaystyle \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

   (**N.B.** les deux formes du théorème de Gauss sont reliées par le théorème d'Ostrogradsky)

2. **L'autre équation fondamentale de l'électrostatique**, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ entraîne qu'on peut toujours définir un potentiel électrostatique V tel que :

   $$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

3 Formulations alternatives

On peut insérer $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ dans l'équation $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ afin de ramener l'électrostatique à une seule équation différentielle de deuxième degré (**L'équation de Poisson**) :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\text{grad}}V \equiv \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

où l'opérateur $\Delta \equiv \operatorname{div}\overrightarrow{\text{grad}}$ est appelé le Laplacien.

Quand on résout cette équation dans une région sans charges on dit qu'on a affaire à **l'équation de Laplace** :

$$\Delta V = 0$$

4 Potentiel électrostatique V

La différence de V entre deux points $(V_A - V_B)$ est déterminé par la **circulation de $\vec{E}$** entre A et B :

$$U_{AB} \equiv V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

V créé par une charge q à position P :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|} + V_0 \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

V créé par N charges ponctuelles :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} + V_0$$

V créé par une distribution continue :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|} + V_0 \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} + V_0$$

où les dq sont spécifié dans l'éq.(1). S'il n'y a pas de charges à l'infini, la convention est de prendre $V(\infty) = 0$, ce qui entraîne $V_0 = 0$.

5 Dipôle électrostatique

Un modèle d'un dipôle $\vec{p}$ est deux charges $\pm q$ séparées par une distance $\vec{d}$. Le moment dipolaire de ce système est $\vec{p} = q\vec{d}$. Pour des systèmes plus compliqués, le moment dipolaire électrostatique est donné par :

charges ponctuelles	distribution surfacique
$\vec{p} = \sum_i q_i\overrightarrow{OP}_i$	$\vec{p} = \iiint\sigma\,\overrightarrow{OP}d\mathcal{S}$

distribution volumique
$\vec{p} = \iiint \rho \overrightarrow{OP} d\mathcal{V}$

Pour des distances grandes devant la taille du système :

$$V(M) \to \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \qquad (2)$$

6 Diélectriques

Un diélectrique est généralement caractérisé par un **vecteur de polarisation**, $\vec{P}$, défini partout dans le diélectrique. Le vecteur polarisation peut être interprété comme une densité volumique de moment dipolaire telle que $\overrightarrow{dp} = \vec{P} d\mathcal{V}$. Le potentiel créé par le diélectrique est donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{objet}} \frac{\vec{P} \cdot \hat{u}}{r^2} d\mathcal{V} \qquad (3)$$

Un regard alternative (complémentaire) est d'interpréter $\vec{P}$ comme produisant une densité surfacique de polarisation σ_{pol} et une densité volumique de polarisation ρ_{pol}

$$\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad \rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \vec{P}$$

Cette interpretation amène à une expression équivalente de V :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\iint_S \frac{\sigma_{\text{pol}}}{r} d\mathcal{S} + \iiint_V \frac{\rho_{\text{pol}}}{r} d\mathcal{V} \right]$$

7 Déplacement électrique

En présence de diélectriques, il est pratique de définir le **déplacement diélectrique** $\vec{D}$:

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (4)$$

L'équation différentielle de $\vec{D}$ est :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho - \rho_{\text{pol}} \equiv \rho_{\text{libre}} \qquad (5)$$

où ρ_{libre} correspond aux charges réellement manipulées dans une expérience.

On peut parfois résoudre $\vec{D}$ en faisant appel à la forme intégrale de l'éq.(5) :

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS} = Q_{\text{libre,int}} \qquad (6)$$

Très souvent, il y a une relation linéaire entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \qquad (7)$$

où χ_e est la **susceptibilité** du diélectrique.

Mettant (7) dans (4), on obtient une relation linéaire entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ (**relation constitutive**) :

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \equiv \epsilon_d \vec{E}$$

où ε_r est la constante diélectrique (relative) du diélectrique et ϵ_d est la permittivité du diélectrique.

8 Conducteurs parfaits à l'équilibre électrostatique

Le champ à **l'intérieur d'un conducteur parfait** est :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}, \quad \vec{D}_{\text{int}} = \vec{0}, \quad V = Cte$$

Le champ à **proximité d'un conducteur** est donné par (Th. de Coulomb) :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\varepsilon_r \epsilon_0} \hat{n}, \qquad \vec{D}_{\text{ext}} = \sigma_{\text{libre}} \hat{n}$$

où $\hat{n}$ est le vecteur normale à la surface (de l'intérieur vers l'extérieur) et σ_{libre} est la charge surfacique du conducteur (dans le vide $\varepsilon_r = 1$).
Capacité C d'un conducteur isolé :

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \text{où} \qquad Q = \iint_{\text{surface}} \sigma d^2 S$$

Coefficients d'influence d'un système de N conducteurs

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j \qquad \text{avec} \qquad C_{ij} = C_{ji}$$

Capacité d'un condensateur

$$C = \frac{Q}{U} \qquad \text{où} \qquad U = V_1 - V_2 \text{ , } Q = Q_1 = -Q_2$$

où Q_1, Q_2 sont les charges sur les surfaces en influence totale (ou quasi totale).

9 Energie potentielle électrostatique

D'une charge ponctuelle : $W_e = qV$

D'un dipôle : $W_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$

De distributions de charge :

$$W_e = \iint_{\text{Surface(s)}} \sigma V d^2S + \iiint_{\text{objet(s)}} \rho V d\mathcal{V}$$

Energie à partir du champ électrique

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{tout l'espace}} \varepsilon_r \left\|\vec{E}\right\|^2 d\mathcal{V}$$

D'un conducteur isolé :

$$W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

D'un système de N conducteurs :

$$W_e = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} Q_i V_i$$

10 Force électrostatique

Sur une particule chargée (Coulomb)

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Sur un conducteur en équilibre :

$$\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{d^2F} = \iint_S \mathcal{P}\overrightarrow{dS}$$

où $\mathcal{P} = \sigma^2/\varepsilon_r\epsilon_0$ est la pression électrostatique.

Force via l'énergie (travaux virtuels) :

$$\vec{F} = -\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, W_e\right)_Q = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, W_e\right)_V$$

Force et moment sur un dipôle :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

Force sur l'armature i d'un condensateur :

$$\vec{F}_{\to i} = -\left(\overrightarrow{\text{grad}}_i\, W_e\right)_Q = \frac{U^2}{2}\overrightarrow{\text{grad}}_i\, C$$

où i désigne qu'il s'agit d'un gradient par rapport aux coordonnées du conducteur i.

11 Courrant et résistance

Densité de courant $\vec{j}$:

$$\vec{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_a = \sum_\alpha \rho_\alpha \vec{v}_a$$

Courrant I :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Loi d'Ohm local : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

(γ conductivité, $\eta = 1/\gamma$ résistivité)

Résistance d'un conducteur

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}}{\iint \gamma\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

D'un fil de section S et longueur L :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

D'un conducteur de section variable :

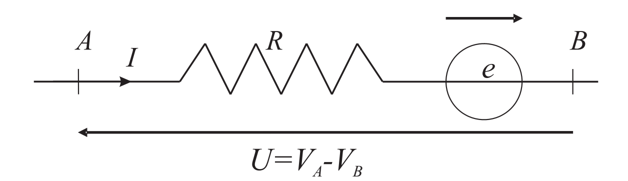
$$R = \int \frac{dl}{\gamma S} \qquad (8)$$

12 Electrocinétique

Force électromotrice (fém) entre A et B

$$e = \int_A^B \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot \overrightarrow{dl}$$

Bilan de puissance d'une portion de circuit



- $U = V_A - V_B = RI - e$
- $P = UI$, puissance disponible entre A et B
- $P_J = RI^2$, puissance dissipée par effet Joule
- $P = eI$ puissance fournie
  générée (si $e > 0$) ou consommée (si $e < 0$)

Lois de conservation

- Lois des noeuds (conservation de charge)

$$\sum I_{\text{entrants}} = \sum I_{\text{sortants}}$$

- Loi des mailles (conservation d'énergie)

$$\sum (R_k I_k - e_k) = 0$$